

LXVI олимпиада по математике Эстонии
ШКОЛЬНЫЙ ТУР ТАЛЛИННА
Таллинн, 10 января 2019 года
X класс

Время, отводимое для решения: 4 часа.

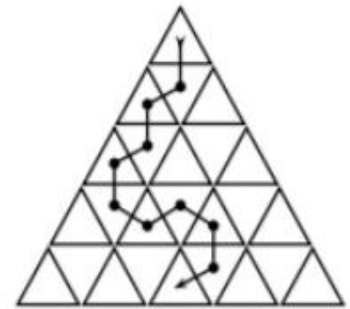
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Рабочий и ученик получили одинаковые задания – изготовить некоторое число одинаковых деталей. К тому времени, как рабочий закончил изготовление своих деталей, у ученика были изготовлены 80% деталей. Если бы ученик делал на одну деталь в день меньше, то к тому времени, когда рабочий закончил изготовление своих деталей, у них вместе было бы изготовлено 87,5% всего количества деталей. Сколько деталей вместе смогут изготовить рабочий и ученик за три дня, если они работают с постоянной скоростью?

2. Найди значения параметра a , при котором сумма квадратов корней уравнения $x^2 + 3x - a(x + 1) - 4 = 0$ будет наименьшей.

3. Дан равносторонний треугольник, длина стороны которого равна n . Треугольник разделен на маленькие равносторонние треугольники с длиной стороны, равной 1. Червяк начинает движение из треугольника при вершине и заканчивает свой путь в среднем треугольнике противоположащей стороны. Червяк может двигаться из одного треугольника в другой, если у треугольников есть общая сторона. Червяк не может двигаться вверх. Сколько различных путей червяка существует, если при движении он не навещает ни один треугольник несколько раз?



(На рисунке представлен один из возможных путей червяка при $n = 5$).

4. В треугольнике ABC высота BK и медиана CM пересекаются в точке O . Найди площадь треугольника ABC , если $BK = 6$ см, $CM = 5$ см и $OK = 1$ см.
5. Договоримся называть ряд цифр “красивым”, если он состоит из единиц и нулей. Договоримся называть ряд цифр “красивым в квадрате”, если он состоит из единиц и нулей и содержит все возможные двузначные комбинации этих цифр. (Например, ряд 000010111111 “красивый в квадрате”, т.к. содержит все возможные двузначные комбинации: 00, 01, 10 и 11.) Договоримся называть ряд цифр “красивым в кубе”, если он состоит из единиц и нулей и содержит все возможные трехзначные комбинации этих цифр.
- а) Сколько цифр в самом коротком “красивом в кубе” ряду?
- б) Юрий придумал игру, в которой за каждый ход можно либо заменить 3 нуля на единицы либо две единицы заменить нулями. В начале игры на доске записан кратчайший “красивый в кубе” ряд цифр. Юрий начинает игру и делает 2019 ходов. Возможно ли для некоторого “красивого в кубе” ряда после 2019 ходов получить вновь “красивый в кубе” ряд цифр?